

1. Estudie si las siguientes aplicaciones son inyectivas y sobreyectivas:

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$.

(b) $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(E) = \text{card}(E)$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y $\text{card}(E)$ es el número de elementos del conjunto E .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$

Inyectiva si: $f(x_1) \neq f(x_2)$ si: $x \neq x_1$ con $x \in \mathbb{R}$

$f(x_1) = f(x_2)$; $e^{x_1} = e^{x_2}$; $x_1 = x_2$ ✓

Sobreyectiva si: $\text{im } f = \mathbb{R}$. $f(x) = 0$ no existe X

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$ $f(x) = \sqrt{x}$

Inyectiva: $f(x_1) = f(x_2)$; $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$; $x_1 = x_2$ ✓

Sobreyectiva: $f(x) = 0$; $\sqrt{x} = 0$; $x = 0$ $0 \notin \mathbb{N}$ X

2. Sean $f: E \rightarrow F$ y $g: F \rightarrow G$, dos aplicaciones. Demuestre que:

(a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(b) Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

(c) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

a) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$; $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$; $f(x_1) = f(x_2)$; $x_1 = x_2$ ✓

b) $g \circ f(E) = G$

$\hookrightarrow g(f(E)) = G$; $f(F) = G$; $G = G$ ✓

3. Estudie si las siguientes operaciones internas en $\mathbb{Z}$ son asociativas, conmutativas y si tienen neutro:

(a) $m * n = m^2 + n^2$.

(b) $m * n = 2(m + n)$.

a) Asociativa $\rightarrow (m * n) * p = m * (n * p)$; $(m^2 + n^2) * p = m * (n^2 + p^2)$; $(m^2 + n^2) + p^2 \neq m^2 + (n^2 + p^2)$ X

Conmutativa $\rightarrow m * n = n * p$; $m^2 + n^2 = n^2 + m^2$ ✓

Neutro $\rightarrow m * e = m$; $m^2 + e^2 = m$; $e = \sqrt{m^2 - m}$ No es único para todo m X

b) Asociativa $\rightarrow (m * n) * p = m * (n * p)$; $(2m + 2n) * p = m * (2n + 2p)$; $4m + 4n + 2p \neq 2m + 4n + 4p$ X

Conmutativa $\rightarrow m * n = n * p$; $2m + 2n = 2n + 2m$ ✓

Neutro $\rightarrow m * e = m$; $2m + 2e = m$; $e = \frac{m - 2m}{2} = \boxed{\frac{-m}{2}}$ No es único para todo m X

4. Estudie las propiedades de la siguiente operación interna en el conjunto $\mathbb{Q}^+$ de los números racionales positivos

$$a * b = a + \frac{1}{b}.$$

- Asociativa $\rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$; $(a + \frac{1}{b}) * c = a * (b + \frac{1}{c})$; $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \neq a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$ X

- Conmutativa $\rightarrow a * b = b * a$; $a + \frac{1}{b} \neq b + \frac{1}{a}$ X

- Neutro $\rightarrow a * e = a$; $a + \frac{1}{e} = a$; $e = \frac{1}{0}$ X No existe

5. Determine cuáles de las siguientes estructuras son grupos:

(a) $A = \{-1, 1\}$ equipado con el producto de números reales.

(b) $B = \{-1, 1\}$ equipado con la suma de números reales.

(c) $C = \{-1, 0, 1\}$ equipado con la suma de números reales.

(d) $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 10m, m \in \mathbb{Z}\}$ equipado con la suma de números reales.

a) $A = \{-1, 1\}$ - Interna $\rightarrow 1 \cdot (-1) = -1$ $1 \cdot 1 = 1$ $(-1) \cdot (-1) = 1$ ✓

- Asociativa $\rightarrow 1 \cdot ((-1) \cdot (-1)) = ((1 \cdot (-1)) \cdot (-1))$; $-1 = -1$ ✓

- Neutro $\rightarrow a \cdot e = a$ $-1 \cdot 1 = -1$ $1 \cdot 1 = 1$ $e = 1$ ✓ Inverso $\rightarrow a \cdot c = e$ $\frac{-1 \cdot -1 = 1}{1 \cdot 1 = 1}$ ✓

b) $B = \{-1, 1\}$ - Interna $\rightarrow 1 + 1 = 2$ X

c) $C = \{-1, 0, 1\}$ - Interna $\rightarrow 1 + 1 = 2$ X

d) $D = \{n \in \mathbb{Z} : n = 10m, m \in \mathbb{Z}\}$ - Interna $\rightarrow 10m + 10z = 10 \cdot (m + z) = 10 \cdot \underbrace{(m + z)}_{z + m \in \mathbb{Z}} = 10 \in \mathbb{Z}$ ✓

- Asociativa $\rightarrow a * (b * n) = (a * b) * n$; $10n + (10m + 10n) = (10m + 10n) + 10n$ ✓

- Neutro $\rightarrow a * e = a$ $10n + 0 = 10n$ $e = 0$ - Inverso $\rightarrow 10m - 10m = 0$

6. Se considera la estructura $(\mathbb{R}, *)$, donde $*$ se define como

$$a * b = a + b - ab.$$

Estudie si se trata de un grupo abeliano.

- Interna $\rightarrow \checkmark$

- Asociativa $\rightarrow a * (b * c) = (a * b) * c$; $a * (b + c - bc) = (a + b - ab) * c$; $\checkmark$

$$a + b + c - bc - ab - ac + abc = a + b - ab + c - ac - ab + bc$$

- Conmutativa $\rightarrow \checkmark$ $a + b - ab = b + a - ba$

- Neutro $\rightarrow a * 0 = a + 0 - a \cdot 0 = a$ $\checkmark$

- Inverso $\rightarrow a * i = e$; $a + i - ai = e = 0$ $\times$

Para $a=1$ $\times$ exist

$$i(1-a) = -a; i = \frac{-a}{1-a}$$

9. Se consideran los siguientes elementos de S_5

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\sigma\tau, \tau\sigma, \sigma^2, \sigma^{-1}$ y τ^{-1} .

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$